Indécomposabilité de la loi de Poisson

Énoncé Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X et Y suivent aussi des lois de Poisson.

Dans ce développement on a besoin du théorème suivant (à admettre ou mettre dans le plan selon la leçon) :

Théorème. Soit f une fonction entière (*i.e* holomorphe sur $\mathbb{C}$) ne s'annulant pas. Alors il existe F une fonction entière telle que $f = e^F$.

On peut maintenant passer à la preuve :
Notons $Z = X+Y$, $f = G_X$ la série génératrice de X et $g = G_Y$ celle de Y. Puisque que X et Y sont indépendantes et que $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a, pour tout $z \in \mathbb{D}(0,1)$:

$$f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Étape 1. On veut étendre cette égalité à $\mathbb{C}$ tout entier. Notons $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ et $q_n = \mathbb{P}(Y=n)$, de telle sorte que pour $z \in \mathbb{D}(0,1)$:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n, g(z) = \sum_{n\geq 0} q_n z^n$$

L'égalité précédente donne, pour tout $z \in \mathbb{D}(0,1)$:

$$\left(\sum_{n\geq 0} p_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} q_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

Donc par unicité du développement en série entière : $p_0 q_0 = e^{-\lambda} > 0$ donc $p_0 > 0, q_0 > 0$ et pour $n \geq 1$:

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = p_n q_0 + p_{n-1}q_1 + \cdots + p_0 q_n \geq \max(p_n q_0, p_0 q_n)$$

Ainsi, pour $n \geq 1$ on a :

$$0 \leq p_n \leq \frac{1}{q_0}\max(p_n q_0, p_0 q_n) \leq \frac{1}{q_0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Or $\frac{1}{q_0}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, donc f définit elle aussi une série entière de rayon de convergence $+\infty$, et donc f est entière. De la même façon, g est entière.
Par prolongement analytique, l'égalité $f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$ est donc valable sur $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier, puisque $z \mapsto e^{\lambda(z-1)}$ ne s'annule pas, f et g ne s'annulent pas non plus sur $\mathbb{C}$.

Étape 2. Identification de f et g :
Soit $z \in \mathbb{C}$, notons $r = |z|$. On a, par ingélité triangulaire dans les sommes partielles puis passage à la limite :

$$|f(z)| \leq f(|z|) = f(r)$$

avec, de plus, $0 < q_0 \leq g(r)$ donc

$$q_0 f(r) \leq f(r)g(r) = e^{\lambda(r-1)}$$

Ainsi, il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z)| \leq Ce^{\lambda|z|}$$

De la même façon, on a $C' > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|g(z)| \leq C'e^{\lambda|z|}$$

Or f et g sont entières et ne s'annulent pas donc, d'après le théorème du début : $f = e^F$ et $g = e^G$ où F, G sont des fonctions entières.

Les inégalités précédentes donnent alors :

$$|f(z)| = e^{Re(F(z))} \leq Ce^{\lambda|z|}$$

donc :

$$Re(F(z)) \leq ln(C) + \lambda|z|$$

Or : F est entière donc on peut l'écrire sous la forme d'une série entière : $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$
Avec, en plus :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{it})e^{-int}dt$$
$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{it})e^{int}dt$$

donc, en conjuguant la deuxième expression puis en sommant :

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Re(F(re^{it}))e^{-int}dt$$

donc

$$\begin{aligned}|a_n||r^n| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |Re(F(re^{it}))|dt \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ln(C) + \lambda r dt \\ &\leq 2ln(C) + 2\lambda r\end{aligned}$$

Ainsi, si $n \geq 2$:

$$|a_n| \leq \frac{2ln(C)}{r^n} + 2\frac{\lambda}{r^{n-1}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

On en déduit que $a_n = 0$ dès que $n \geq 2$, donc il existe $\alpha, a \in \mathbb{C}$ tels que $F(z) = \alpha z + a$.
On a $f(z) = e^{\alpha z + a}$. On a, de plus, $1 = f(1) = e^{\alpha}e^{a}$ donc quitte à changer a en $a + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$: $\alpha = -a$ et $f(z) = e^{\alpha(z-1)}$.
Il reste à vérifier que α est réel positif car on reconnaîtra alors la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre α.
On a $f'(z) = \alpha e^{\alpha(z-1)}$ donc $f'(1) = \alpha$. Or $f'(1) = G'_X(1) = \mathbb{E}[X] \geq 0$. Ainsi, $\alpha \geq 0$ et $G_X(z) = e^{\alpha(z-1)}$ est la série génératrice d'une loi de Poisson. Puisque la série de génératrice de X caractérise la loi de X, on en déduit que X suit une loi de Poisson. De même, Y suit aussi une loi de Poisson.